

4. Περίθλαση ηλεκτρονίων σε κρυσταλλικό πλέγμα γραφίτη

Προαπαιτούμενες γνώσεις

- ✓ Πλεγματικά επίπεδα και ανάκλαση Bragg
- ✓ Μέθοδος Debye-Scherrer
- ✓ Κύματα de Broglie
- ✓ Περίθλαση ηλεκτρονίων σε κρυσταλλική ύλη
- ✓ Δομή γραφίτη

Περιεχόμενο της άσκησης

Είναι γνωστό ότι όταν ακτίνες X προσπίπτουν με ορισμένη κατεύθυνση επί της κρυσταλλικής ύλης, ανακλώνται επί των πλεγματικών επιπέδων και δίνουν φαινόμενα ενισχυτικής συμβολής προς ορισμένες διευθύνσεις που καθορίζονται από την εξίσωση Bragg. Αρκεί, βεβαίως, το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας να είναι της αυτής τάξης μεγέθους με την απόσταση των πλεγματικών επιπέδων.

Από την άλλη πλευρά είναι γνωστό, σύμφωνα με τη θεωρία de Broglie, ότι ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια έχουν κυματικές ιδιότητες, με όλες τις συνέπειες που απορρέουν από τη κυματική φυσική. Η ιδέα στην οποία βασίζεται η παρούσα άσκηση είναι η εξής: Αφού τα κινούμενα ηλεκτρόνια έχουν κυματικές ιδιότητες, θα πρέπει να δίνουν παρόμοια φαινόμενα περίθλασης με ακτίνες X όταν προσπίπτουν επί της κρυσταλλικής ύλης. Αρκεί το αντίστοιχο μήκος κύματος de Broglie να είναι συμβατό με τις αποστάσεις πλεγματικών επιπέδων. Στη παρούσα άσκηση μέσα σε ειδική λυχνία δημιουργείται εστιασμένη δέσμη ηλεκτρονίων που επιταχύνονται σε κατάλληλη διαφορά δυναμικού και προσπίπτουν επί λεπτού στρώματος πολυκρυσταλλικής σκόνης γραφίτη. Πάνω στη φθορίζουσα οθόνη της λυχνίας εμφανίζεται εικόνα περίθλασης από ομόκεντρους δακτυλίους. Στην άσκηση αυτή μας δίνονται δύο δυνατότητες: Αφ' ενός να διαπιστώσουμε τη κυματική φύση των κινουμένων ηλεκτρονίων και αφ' ετέρου από μετρήσεις στην εικόνα περίθλασης να υπολογίσουμε αποστάσεις πλεγματικών επιπέδων στο γραφίτη.

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

- 1) Π. Βαρώτσος, Κ. Αλεξόπουλος, «Φυσική Στερεάς Κατάστασης».
- 2) C. Kittel: «Εισαγωγή στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης».
- 3) R. Feynman: «Lectures in Physics».
- 4) Κ. Αλεξόπουλος «Γενική Φυσική» (Τόμος Ατομικής και Πυρηνικής Φυσικής).

Αρχή της μεθόδου

Κατ' αντιστοιχία με τη σωματιδιακή φύση του φωτονίου, ο de Broglie εφάρμοσε τη σχέση $\lambda_B = \frac{h}{p}$, όπου λ_B το μήκος κύματος de Broglie, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js η σταθερά Planck και p η ορμή του ηλεκτρονίου, σε «σωματίδια» ορμής mv , οπότε οδηγήθηκε στη σχέση:

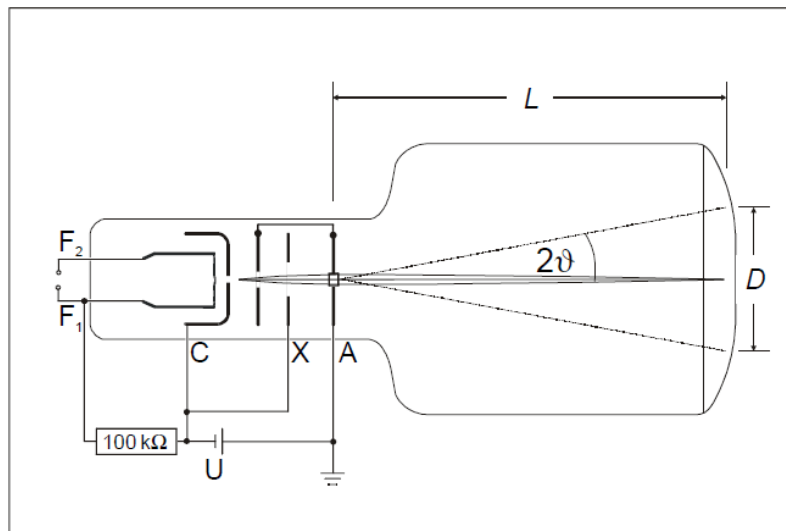
$$\lambda_B = \frac{h}{mv} \quad (1)$$

Τα στοιχεία της κίνησης του σωματιδίου που μπορούν να παρατηρηθούν πειραματικά, υπολογίζονται από τη μελέτη της διάδοσης αυτών των κυμάτων de Broglie. Τα κύματα de Broglie ενός σωματιδίου, αφορούν κύμανση που δεν είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσεως, όμως έχουν σχέση με τη κίνηση και τη θέση του σωματιδίου. Μια πολύ καλή περιγραφή της κυματικής συμπεριφοράς των κινουμένων ηλεκτρονίων μπορεί κανείς να διαβάσει στο βιβλίο "*The Feymann lectures on Physics*", Vol.I, p. 37.4-37.12.

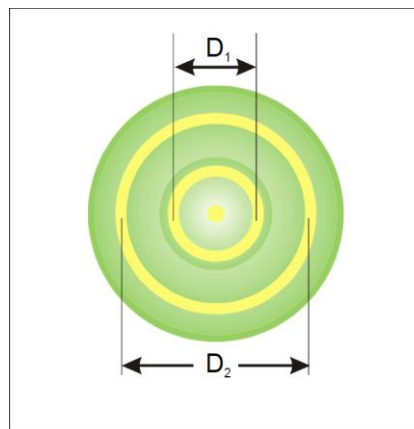
Το κύμα de Broglie ενός σωματιδίου, του οποίου γνωρίζουμε κατά προσέγγιση τη θέση, έχει τη μορφή κυματοσυρμού. Η ταχύτητα ομάδας v του κυματοσυρμού είναι η ταχύτητα του σωματιδίου. Η ταχύτητα φάσεως είναι μέγεθος μη μετρήσιμο και συνεπώς δεν έχει φυσική σημασία. Μια προσδοκώμενη συνέπεια των παραπάνω απόψεων της θεωρίας de Broglie είναι η εξής: Όπως η περίθλαση ακτίνων Roentgen σε κρυσταλλική σκόνη παρέχει ακτινογράφημα Debye-Scherrer, κατά παρόμοιο τρόπο αναμένεται να δρα και μια δέσμη ταχέως κινουμένων ηλεκτρονίων, αφού κατά τη θεωρία de Broglie έχει κυματικές ιδιότητες. Αρκεί το αντίστοιχο μήκος κύματος de Broglie να είναι συμβατό (της τάξης μεγέθους) των αποστάσεων των πλεγματικών επιπέδων στο πολυκρυσταλλικό υλικό. Τα ανωτέρω επαληθεύτηκαν περιπράνως από το πείραμα: Οι George Paget Thomson και Clinton Joseph Davisson μοιράστηκαν το βραβείο Nobel 1937 για την ανακάλυψη αυτή (εικόνα συμβολής από περιθλώμενα ηλεκτρόνια) που έγινε ανεξάρτητα. Επειδή το υλικό είναι πολυκρυσταλλικό, η περίθλαση των ηλεκτρονίων είναι έντονη κατά κώνους, οι οποίοι σχηματίζουν σε επίπεδη οθόνη ομόκεντρους κύκλους.

Στη άσκηση χρησιμοποιείται ειδική λυχνία (**σχήμα 1**), η οποία έχει ενσωματωμένο σύστημα επιτάχυνσης και εστίασης ηλεκτρονίων. Τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν επί της ανόδου, όπου επικάθεται λεπτό υμένιο πολυκρυσταλλικού γραφίτη. Περιθλώμενα επί του γραφίτη προσβάλλουν φθορίζουσα οθόνη πίσω από την άνοδο και εμφανίζουν εικόνα ομόκεντρων δακτυλίων συμβολής (**σχήμα 2**). Μετρώντας τις διαμέτρους των

δακτυλίων της εικόνας συμβολής συναρτήσει του μήκους κύματος de Broglie λ_B που αντιστοιχεί στη διαφορά δυναμικού που επιταχύνει τα ηλεκτρόνια, υπολογίζονται τελικά οι αποστάσεις των πλεγματικών επιπέδων.



Σχήμα 1. Λυχνία περίθλασης ηλεκτρονίων. Αποτελείται από θερμαινόμενη κάθοδο, άνοδο πάνω στην οποία βρίσκεται το πολυκρυσταλλικό δείγμα γραφίτη, και σύστημα πλεγμάτων για την εστίαση. Στο σχήμα διακρίνονται τα ηλεκτρόδια (ακροδέκτες) και οι απαραίτητες τάσεις τροφοδοσίας.



Σχήμα 2. Σχηματικό διάγραμμα δακτυλίων συμβολής στην φθορίζουσα οθόνη της ειδικής λυχνίας.

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν προηγουμένως, για να ερμηνευθεί το φαινόμενο της περίθλασης ηλεκτρονίων, αποδίδεται στα ηλεκτρόνια μήκος κύματος λ_B που δίνεται από τη σχέση (1).

Η ορμή υπολογίζεται από τη ταχύτητα v την οποία αποκτούν τα ηλεκτρόνια υπό την επίδραση του επιταχύνοντος δυναμικού V_A , δηλαδή $\frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m} = eV_A$, άρα

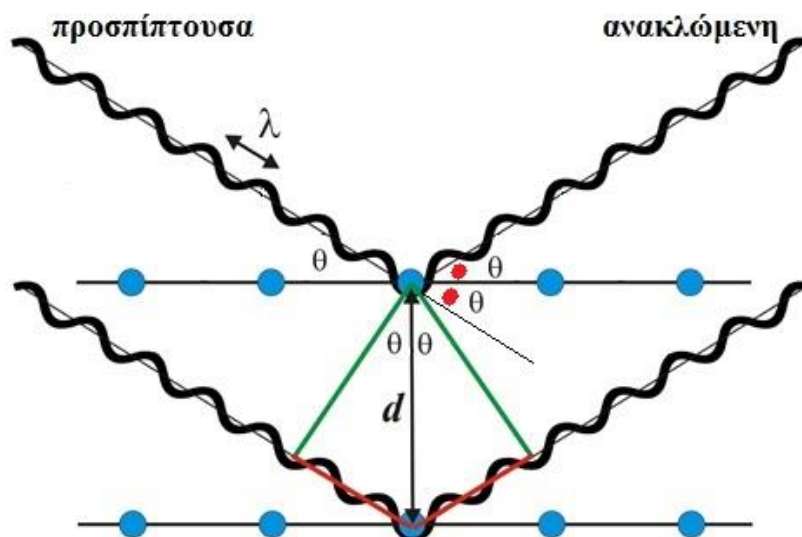
$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2meV_A}} \quad (2)$$

Η σχέση (2) μας επιτρέπει τον υπολογισμό του μήκους κύματος de Broglie λ_B , αν γνωρίζουμε το επιταχύνον δυναμικό V_A ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ Cb και $m = 9.109 \times 10^{-31}$ kg είναι το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου, αντίστοιχα). Στα χρησιμοποιούμενα κατά την εκτέλεση της άσκησης δυναμικά V_A η σχετικιστική διόρθωση της μάζας ανέρχεται περίπου στο 1-2%.

Η δέσμη ηλεκτρονίων προσκρούει πάνω στο υμένιο πολυκρυσταλλικού γραφίτη και δίνει ενισχυτική συμβολή, λόγω ανάκλασης Bragg, κατά τις διευθύνσεις που ορίζονται από τιμές της γωνίας θ , σύμφωνα με την συνθήκη

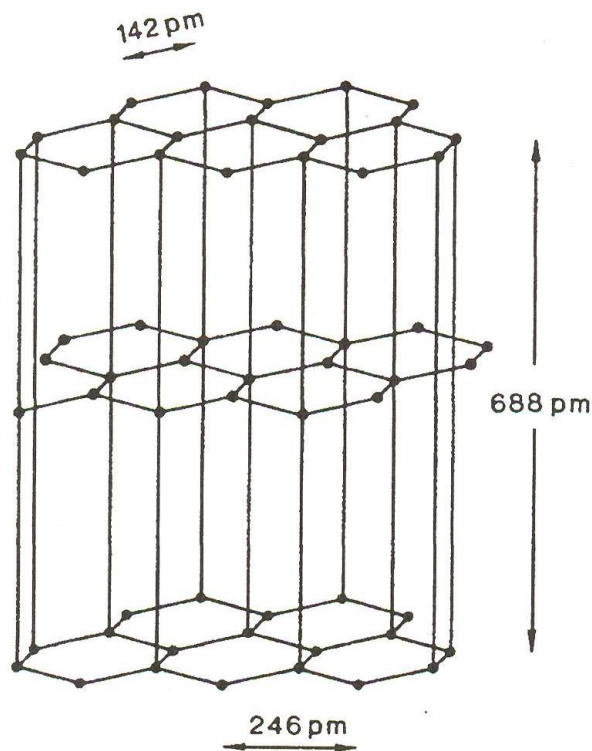
$$2d \eta \mu \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

όπου d είναι η απόσταση ανάμεσα στα επίπεδα των ατόμων άνθρακα και θ είναι η γωνία ανάκλασης κατά Bragg, η οποία είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης κατά Bragg (σχήμα 3). Οι γωνίες αυτές θ είναι συμπληρωματικές των αντιστοίχων γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης της γεωμετρικής οπτικής. Τα πλεγματικά επίπεδα, που δεν έχουν καμία σχέση με τα επιφανειακά επίπεδα ενός δείγματος, υποθέτουμε ότι δρουν σαν επίπεδα ανάκλασης. **Η γωνία εκτροπής του σχήματος 1 είναι διπλάσια από τη γωνία θ ανάκλασης κατά Bragg, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.**



Σχήμα 3: Σχηματική απεικόνιση ανάκλασης κατά Bragg. Παρατηρήστε ότι οι ανακλώμενες δέσμες εμφανίζουν εκτροπή 2θ σε σχέση με την προσπίπτουσα.

Το κρυσταλλικό πλέγμα του γραφίτη απεικονίζεται στο σχήμα 4. Όμως, στον πολυκρυσταλλικό γραφίτη, η δέσμη των ηλεκτρονίων «βλέπει» όλους τους δυνατούς προσανατολισμούς των πλεγματικών επιπέδων. Έτσι, η δέσμη των ηλεκτρονίων που σκεδάζεται κατά Bragg πάνω σ' αυτά τα πλεγματικά επίπεδα ανοίγει και «διασκορπίζεται» σε γεωμετρία κώνων και δημιουργεί αντιστοιχούς προς τα πλεγματικά επίπεδα δακτυλίους συμβολής στην φθορίζουσα οθόνη. Οι δακτύλιοι της εικόνας συμβολής αντιστοιχούν σε όλους τους δυνατούς τρόπους σκέδασης πάνω στα πλεγματικά επίπεδα. Οι δακτύλιοι δεν έχουν την ίδια ένταση. Η ένταση των δακτυλίων υψηλότερης τάξης είναι πολύ ασθενέστερη για αυτό θα θεωρήσουμε στην άσκηση αυτή δακτύλιους πρώτης τάξης $n = 1$.



Σχήμα 4. Κρυσταλλική δομή του γραφίτη.

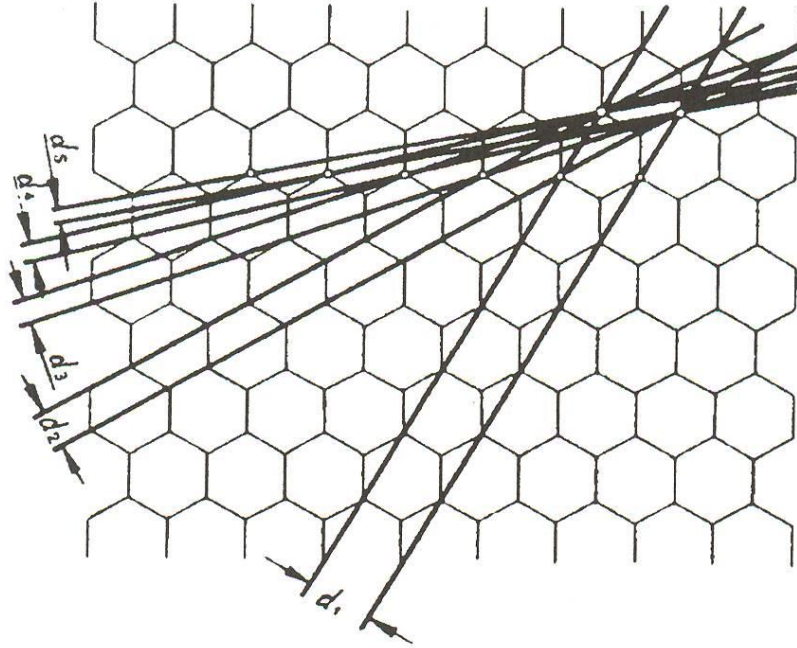
Αν α είναι η γωνία απόκλισης της δέσμης ($\alpha = 2\theta$), όπως συνάγεται από την γεωμετρία του σχήματος 1, θα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{D}{2L} \quad (4)$$

όπου $L = 13.5 \text{ cm}$ η απόσταση της οθόνης από το πλέγμα γραφίτη και D η διάμετρος του δακτυλίου. Για μικρές γωνίες α , $\varepsilon\varphi\alpha \approx \eta\mu\alpha$ και συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\alpha = 2\theta$ θα έχουμε $\eta\mu\alpha = \eta\mu 2\theta \approx 2\eta\mu\theta$. Άρα, με αυτή τη προσέγγιση

$\epsilon\phi\alpha \approx \eta\mu\alpha \approx 2\eta\mu\theta = \frac{D}{2L}$ και βάσει της σχέσης $2d\eta\mu\theta = n\lambda$ έχουμε

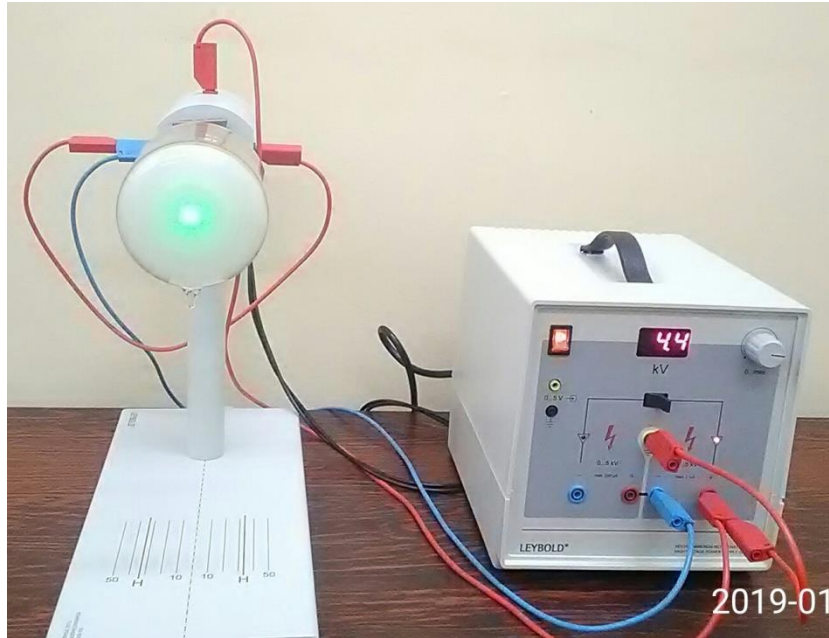
$$d = \frac{2L}{D}n\lambda, \quad (5)$$



Σχήμα 5. Δυνατές αποστάσεις μεταξύ πλεγματικών επιπέδων ($d_1 = 213$ pm, $d_2 = 123$ pm, $d_3 = 80.5$ pm, $d_4 = 59.1$ pm, $d_5 = 46.5$ pm).

Η μελέτη της σχέσης (5) οδηγεί στα εξής συμπεράσματα:

- Για δεδομένη τάξη περίθλασης π.χ. $n = 1$ πρώτης τάξης, $n = 2$ δεύτερης τάξης, κλπ, εμφανίζεται ομάδα δακτυλίων ενισχυτικής συμβολής κυμάτων. Ο κάθε δακτύλιος συγκεκριμένης ομάδας επί της οθόνης αντιστοιχεί σε ανάκλαση Bragg επί ενός συγκεκριμένου από τα δυνατά πλεγματικά επίπεδα που μπορούμε να θεωρήσουμε (σχήμα 5). Ο αριθμός των δακτυλίων κάθε ομάδας είναι τόσος όσες είναι οι δυνατές αποστάσεις d των πλεγματικών επιπέδων. Οι δύο εσωτερικοί δακτύλιοι σχηματίζονται από την ανάκλαση της δέσμης των ηλεκτρονίων στα πλεγματικά επίπεδα αποστάσεων d_1 και d_2 για $n = 1$ στην εξίσωση (5).
- Η διάμετρος D του συγκεκριμένου δακτυλίου συγκεκριμένης τάξης n βρίσκεται σε γραμμική σχέση με το μήκος κύματος de Broglie λ , το οποίο περιγράφει την κυματική συμπεριφορά των κινουμένων ηλεκτρονίων.
- Παρατηρώντας την εξίσωση (5), βγάζουμε το συμπέρασμα ότι μπορεί κανείς από τη κλίση $A_i = 2L/d_i$ των ευθειών $D = f(\lambda)$ για δεδομένη τάξη περίθλασης ($n = \text{σταθερό}$) να προσδιορίσει τις δυνατές αποστάσεις d_i των πλεγματικών επιπέδων του γραφίτη.



Σχήμα 6. Η πειραματική διάταξη περίθλασης ηλεκτρονίων σε γραφίτη.

Εκτέλεση της άσκησης

1. Αναγνωρίζουμε την πειραματική διάταξη χωρίς το σύστημα να είναι υπό τάση.
2. Με την εποπτεία του επιβλέποντος τροφοδοτούμε το σύστημα και ευρίσκουμε την ελάχιστη τιμή ανοδικής τάσης ώστε μόλις να διακρίνονται οι δακτύλιοι με σκότος στο δωμάτιο. Αυτή είναι περίπου στα 2 kV.
3. Δίνοντας στην ανοδική τάση αυξανόμενες τιμές από 2.8 έως 4.8 kV, όπως δείχνει ο πίνακας, μετράμε τις αντίστοιχες ακτίνες εσωτερικού και εξωτερικού δακτυλίου D_1 και D_2 (σχήμα 2) με παχύμετρο.

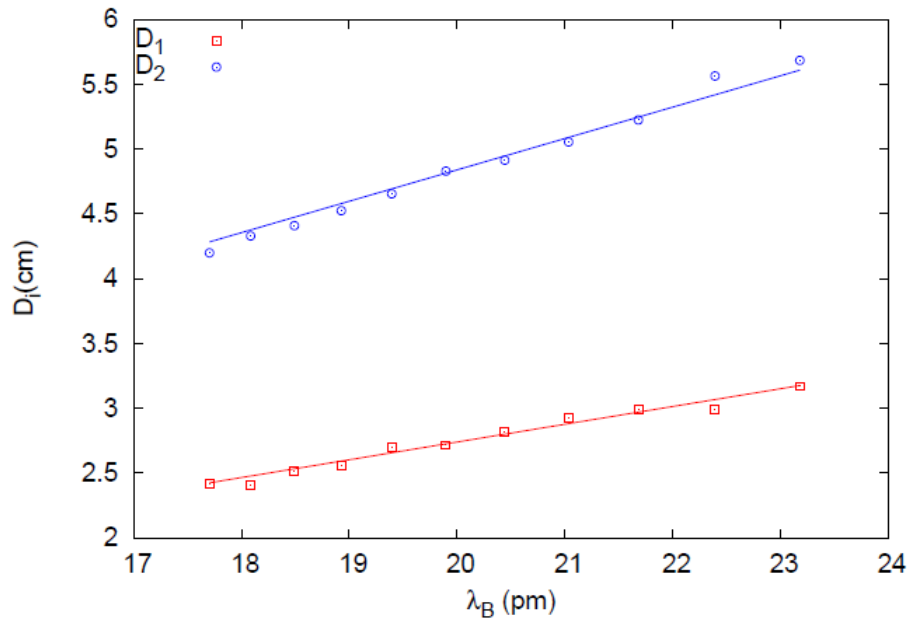
V_A (kV)	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8
D_1 (cm)											
D_2 (cm)											

Επειδή οι δακτύλιοι περίθλασης έχουν ένα αισθητό πάχος, για να εκτιμήσουμε όσο το δυνατόν ακριβέστερα τη διάμετρο ενός δακτυλίου (D_1 ή D_2), μετράμε με παχύμετρο τη διάμετρο του εσωτερικού και εξωτερικού περιμετρικού κύκλου και βγάζουμε το μέσο όρο.

4. Από τη σχέση $\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2meV_A}}$ υπολογίζουμε τα αντίστοιχα μήκη κύματος λ_B . Ακολούθως κατασκευάζουμε πίνακα τιμών (λ_B, D) και κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις της D συναρτήσεως του λ_B για τους δύο δακτυλίους. Αυτές οι γραφικές παραστάσεις αναμένονται να είναι ευθείες σύμφωνα με την εξίσωση

$D = \frac{2L}{d} \lambda_B$. Η κλίση της κάθε ευθείας δίνει την ποσότητα $\frac{2L}{d}$ και από εκεί υπολογίζονται τα d_1 και d_2 .

5. Συγκρίνουμε τα ευρεθέντα d_1 και d_2 με τις αποστάσεις των πλεγματικών επιπέδων που φαίνονται στο σχήμα 5.



Σχήμα 7. Ενδεικτική γραφική παράσταση των διαμέτρων D_i για τους δύο δακτυλίους συναρτήσει του λ_B , η οποία περιλαμβάνει και τις αντίστοιχες ευθείες σύμφωνα με την εξίσωση $D_i = \frac{2L}{d_i} \lambda_B$.